



清华大学自动化实验教学中心
控制理论专题实验

倒立摆建模与控制

实验指示书

王 峻、赵世敏

清华大学自动化实验教学中心

2010年3月

目 录

1	实验要求	3
1.1	实验准备	3
1.2	评分规则	3
1.3	实验报告内容	4
1.4	报告提交截止时间	4
1.5	安全注意事项	4
2	倒立摆实验平台介绍	5
2.1	硬件组成	5
2.2	软件结构	7
3	倒立摆数学建模（预习内容）	10
3.1	倒立摆动力学方程	10
3.2	传递函数	11
3.3	状态空间方程	12
4	实验一：根轨迹方法控制实验	13
4.1	根轨迹分析（预习内容）	13
4.2	根轨迹校正器理论设计（预习内容）	13
4.3	根轨迹校正 Simulink 软仿真	14
4.4	根轨迹校正硬件在环实时仿真	14
4.5	思考题	16
5	实验二：频域响应方法控制实验	17
5.1	频域特性分析（预习内容）	17
5.2	频域响应校正器设计与 MATLAB 仿真（预习内容）	17
5.3	频域响应校正 Simulink 软仿真	17
5.4	频域响应校正硬件在环实时仿真	17
5.5	思考题	18
6	实验三：极点配置控制方法实验	19
6.1	极点配置及软仿真（预习内容）	19
6.2	极点配置软仿真	19
6.3	极点配置硬件在环实时仿真实验	20
6.4	思考题	20
7	实验四：线性二次型最优控制实验	22
7.1	LQR 控制器设计（预习内容）	22
7.2	LQR 控制器软仿真	22
7.3	LQR 控制硬件在环实时仿真实验	23
7.4	思考题	24
8	实验五：自主选题的控制器设计	25
9	附录：控制理论中常用的 MATLAB 函数	26
10	参考文献	27

1 实验要求

1.1 实验准备

实验准备是顺利完成实验内容的必要条件。实验准备的主要内容包括如下的几个方面：

- (1) 复习实验所涉及的 MATLAB 软件和自动控制理论知识；
- (2) 熟悉实验的内容和步骤；
- (3) 根据实验要求，作必要的理论分析与推导。

1.2 评分规则

专题实验满分为 100 分，其中实验考勤及实验态度占 15%，实验预习报告占 25%，实验报告占 60%（其中技术内容占 50%，报告书写占 10%）。

(1) 实验考勤与实验态度

本专题实验的课内、外学时各为 16 学时，合计 32 学时，即 24 小时。课外学时主要用于实验内容的预习和实验报告的写作，课内学时主要用于实验操作。实验考勤和实验态度主要针对课内的学时进行考核。

(2) 实验预习报告

实验预习内容分为两大部分，即倒立摆数学建模和各实验的预习内容。

(3) 实验报告的技术内容

实验报告的技术内容主要包括实验数据的记录与分析 and 实验思考题的解答。实验主要由四部分组成：

- ① 经典控制器设计（实验一、实验二）
- ② 现代控制器设计（实验三、实验四）
- ③ 自主选题的控制器设计（实验五）

实验一～实验四为选做项目，可根据个人兴趣分别选做一个经典控制和一个现代控制实验。每个实验各占 25%，合计 50%；实验五为加选项目，学有余力的同学可以自行设计控制策略。根据控制器的设计难度和控制效果进行评价，最高加 5 分，总分不超过 100 分。

提示：要求每个实验都要附上由教师或助教签字的原始数据。没有原始数据的实验内容无效，该项得分为零分。

(4) 实验报告书写

实验报告书写水平主要考虑文字表达水平（要求层次分明、表述清晰、简洁明了）和规范程度（如图是否有坐标、单位和标题、公式书写及编号是否规范等）。实验报告的书写不仅体现了作者的文字功底，而且反映了作者的治学态度。

提示 1: 报告正文原则上不超过 30 页。实验指示书中已给出的内容不必抄到报告中, 只要注明出处即可。

提示 2: 一旦发现抄袭行为, 抄袭者和被抄袭者均按作弊处理。抄袭包括抄袭本年级同学的报告和往届同学的报告。

1.3 实验报告内容

实验报告包含以下的内容。可根据实验的具体情况和要求进行适当调整。

- (1) 理论分析的主要步骤;
- (2) 软仿真和硬件在环实验结果及其分析 (Matlab 程序在附件中给出即可);
- (3) 回答思考题;
- (4) 总结实验心得及对实验的意见或建议。

1.4 报告提交截止时间

请将纸版报告在 **2010 年 6 月 11 日 (15 周周五) 下午 4: 30 以前**交至控制理论实验室 (中央主楼 520)。迟交的报告, 其报告技术内容所占的分数为零分。

1.5 安全注意事项

- (1) 实验之前一定要做好预习。
- (2) 为了避免设备失控时造成人身伤害, 操作时人员应该与设备保持安全距离, 不要站在摆的两端。
- (3) 实验前, 确保倒立摆放置平稳; 要检查摆杆的可能摆动范围, 确保不会发生碰撞。
- (4) 如果发生异常, 马上关闭电控箱电源。
- (5) 系统运行时禁止将手或身体的其他部位伸入小车运行轨道之间。

2 倒立摆实验平台介绍

倒立摆是一个典型的不稳定系统，同时又具有多变量、非线性、强耦合的特性，是自动控制理论中的典型被控对象。它深刻揭示了自然界一种基本规律，即一个自然不稳定的被控对象，运用控制手段可使之具有一定的稳定性和良好的性能。许多抽象的控制概念如控制系统的稳定性、可控性、系统收敛速度和系统抗干扰能力等，都可以通过倒立摆系统直观的表现出来。

本实验以固高科技公司的单级直线倒立摆为研究对象。倒立摆实验平台分为硬件和软件两大部分。

2.1 硬件组成

倒立摆硬件系统由倒立摆本体、计算机（含运动控制卡）、电控箱（包括交流伺服电机驱动器、运动控制卡的接口板、直流电源等）三大部分组成。如图 1 所示，倒立摆系统的本体由被控对象（小车和摆杆）、传感器（角度传感器）和执行机构（松下伺服电机及其传动装置）组成。

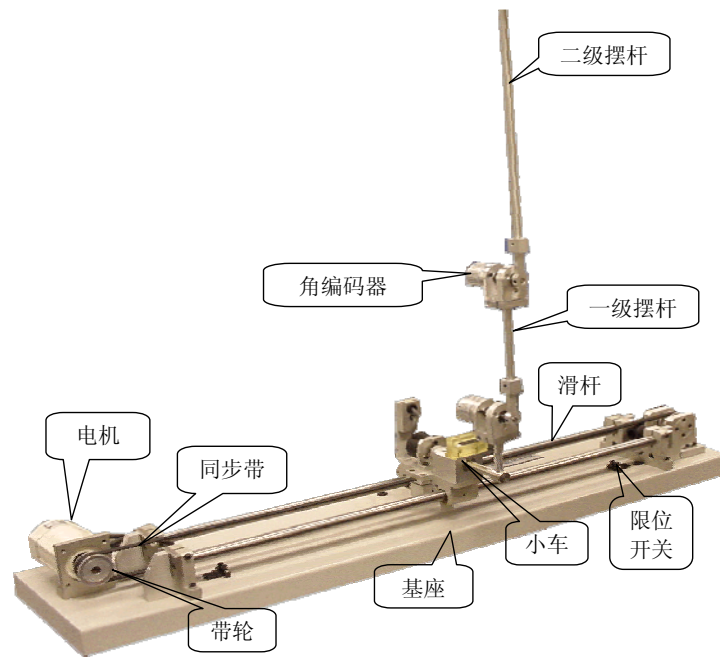


图 1 直线倒立摆本体结构

(1) 被控对象

倒立摆的被控对象为摆杆和小车。摆杆通过铰链连接在小车上，并可以围绕连接轴自由旋转。通过给小车施加适当的力可以将摆杆直立起来并保持稳定的状态。

(2) 传感器

倒立摆系统中的传感器为光电编码盘。旋转编码器是一种角位移传感器，它分为光电式、接触式和电磁感应式三种，本系统用到的就是光电式增量编码器。

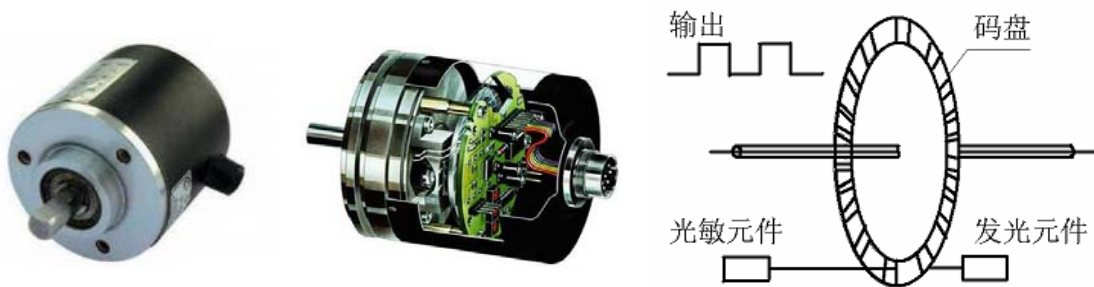


图2 光电编码器外观、剖面图和原理示意图

图2为光电式增量编码器示意图，它由发光元件、光电码盘、光敏元件和信号处理电路组成。当码盘随工作轴一起转动时，光源透过光电码盘上的光栅板形成忽明忽暗的光信号，光敏元件把光信号转换成电信号，然后通过信号处理电路的整形、放大、分频、记数、译码后输出。

光电式增量编码器的测量精度取决于它所能分辨的最小角度 α ，而这与码盘圆周内所分狭缝的线数有关： $\alpha = 360^\circ/n$ ，其中 n 为编码器线数。对于线数为 n 的编码器，设信号采集卡倍频数为 m ，则有角度换算关系为 $\phi = \frac{360^\circ}{n \cdot m} N$ ，式中 ϕ 为编码器轴转角， N 为编码器读数。对于电机编码器，在倒立摆使用中需要把编码器读数转化为小车的水平位置，因此 $l = \frac{180^\circ \times \Phi}{n \cdot m} N$ ，式中 l 为小车位移， Φ 为同步带轮直径。

(3) 执行机构

倒立摆系统的执行机构为松下伺服电机和与之连接的皮带轮。电机的转矩和速度通过皮带轮传送到小车上，从而带动下车的运动。电机的驱动由与其配套的伺服驱动器提供。松下伺服电机及其驱动器如图3所示。



图3 松下伺服电机及其驱动器^[1]

电机的控制是通过固高公司的GT系列运动控制器（见图3）实现的。该控制器可以同步控制四个运动轴，实现多轴协调运动。运动控制器以计算机为主机，提供标准的

ISA 总线或 PCI 总线接口，并且可以提供 RS232 串行通讯和 PC104 通讯接口。运动控制器同时具有 A/D 信号采集功能，从而能够将光电编码盘的信号传递到计算机。

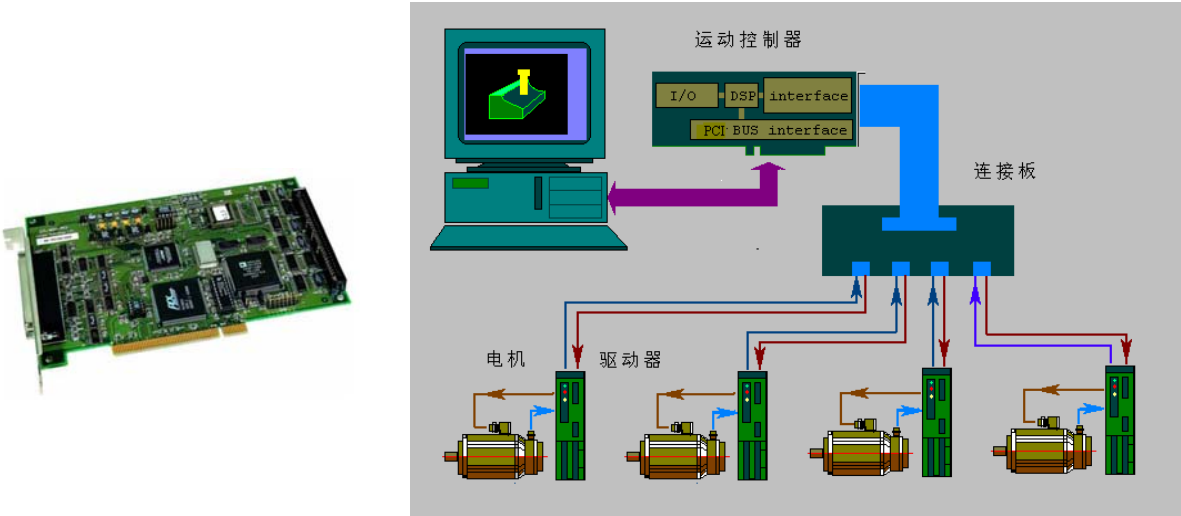


图 4 GT 系列运动控制器及其组成的控制系统框图^[2]

倒立摆系统中的计算机、运动控制卡、伺服驱动器、倒立摆本体（包含摆杆、小车、伺服电机、光电码盘）几大部分组成了图 5 所示的一个闭环系统。

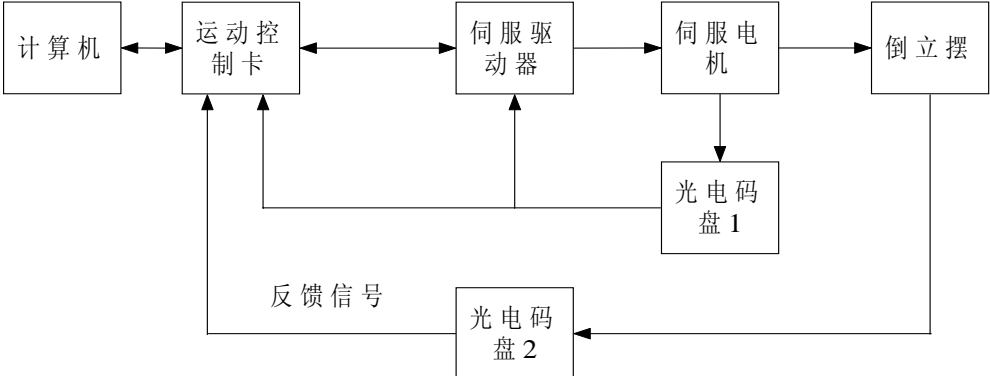


图 5 倒立摆硬件组成方框图

光电码盘 1 将小车的位移、速度信号反馈给伺服驱动器和运动控制卡，而光电码盘 2 将摆杆的位置、速度信号反馈回控制卡。计算机从运动控制卡中读取实时数据，确定控制决策（小车向哪个方向移动、移动速度、加速度等），并由运动控制卡来实现该控制决策，产生相应的控制量，使电机转动，带动小车运动，保持摆杆平衡。

2.2 软件结构

倒立摆实验以 MathWorks 公司的 MATLAB/Simulink 软件及其实时工具箱(Real-Time Workshop^[3]，简称 RTW) 为软件平台，实现倒立摆控制器的纯软件仿真和硬件在环 (Hardware-in-the-Loop) 的仿真实验。

MATLAB/Simulink 是目前最为广泛使用的控制系统分析与控制器设计的软件。MATLAB 主要是以语句的形式实现仿真的功能，比较简洁，执行速度比较快；Simulink 是以方框图的方式构建模型进行仿真，形象直观，简单易学。关于如何使用 MATLAB/Simulink 进行控制系统的分析，请参考相关文献。附录 9 给出了控制系统设计过程中常用到的指令。

MATLAB/Simulink 主要是通过纯软件的方式实现系统的仿真。这种仿真方式比较便捷，但由于一个系统的数学模型与真实的系统总存在一定的差异，特别是复杂的系统，所以纯软件的仿真（以下简称“软仿真”）往往精度不高。

近年来，硬件在环仿真逐步成为控制系统设计与仿真的主流，其在航空航天控制和汽车控制领域运用得尤为广泛。硬件在环仿真（又称半实物仿真）是将软件和硬件以实时的方式连接在一起进行仿真实验，不仅实现方便，而且可靠性高。以倒立摆硬件在环仿真为例，控制器的算法由 Simulink 软件模块实现，而被控对象（倒立摆小车和摆杆）、传感器（编码盘）、执行机构（电机及其驱动）等是真实的硬件。MATLAB/Simulink 仿真软件与硬件之间的连接是通过以 RTW 实时工具箱为核心的软件组和它们所支持的数据采集卡等硬件实现的。RTW 将 MATLAB/Simulink 中的软件根据硬件系统的特点编译成可执行文件。该文件运行在独立的另一台计算机、数字信号处理器或同一计算机 CPU 优先级最高的区域，实时地将指令发送给数据采集卡，同时又将数据采集卡采集到的传感器的信息反馈给 MATLAB/Simulink 的软模型。

硬件在环仿真有多种实现方式。本实验采用 Real-Time Windows Target^[4]的方式，即目标机（运行实时可执行文件的机器）和监控机（运行 MATLAB/Simulink 软件实行监控的机器）为同一计算机的方式。MATLAB/Simulink 运行在 Windows 操作系统中，而编译的可执行文件运行在 CPU 优先级最高的区域。数据采集卡为固高公司的 GT-400-SV 运动卡。该卡不仅实现传感器信号的采集功能，而且能够依据倒立摆控制信号的要求，计算驱动电机需要的输入信号，经过功率箱放大，驱动伺服机。

硬件在环实验与传统的软仿真实验相比，需要对 Simulink 模型进行编译（Build）和连接（Connect）操作。下面，我们以摆杆角度检测为例，介绍硬件在环实验的简单步骤和应注意的问题。

- （1）打开 MATLAB 以及 Simulink 环境，建立图 6 所示的模型。图中蓝色的模块来自 Simulink 窗口中的“GT-400-SV Block Library”。“GetPos”模块得到角度传感器的信号。双击该模块选择轴号为“2”，即第一级摆杆连接的编码器，此编码器固定于小车上。“GT400-SV Initialization”模块实现运动采集卡的初始化。

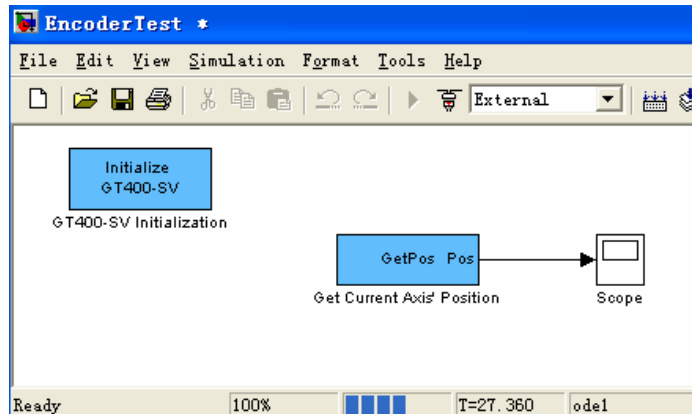


图6 编码器测试模型^[5]

- (2) 将 Simulink 的运行模式从“Normal”更改为“External”。“Normal”即指通常的软仿真，而“External”为硬件在环仿真。在进行硬件在环仿真的时候，需要修改仿真参数。点击菜单“Simulation\Simulation Parameters”，选择离散的定步长仿真方式（步长可设置为 0.005s），仿真终止时间设为“inf”（无穷），处理器（Solver）选完全离散的定步长方法；
- (3) 设置目标机的形式。如图 7 所示，本实验选取“Real-Time Windows Target”的方式（点击“Simulation Parameters/Real-Time Workshop”中的“Browse”按钮）

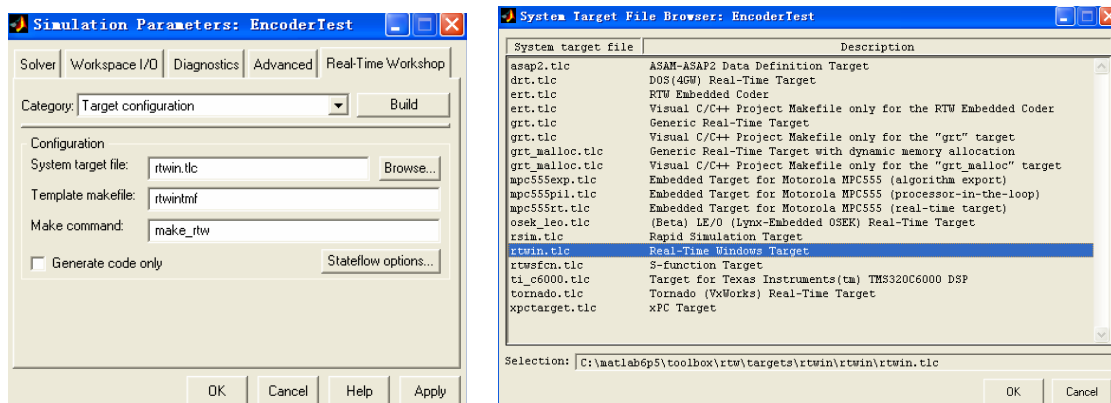





图7 设置硬件在环实时仿真的目标机^[5]

- (4) 编译 Simulink 模型（点击“”编译程序，在 Command 窗口中会有编译信息显示）；
- (5) 打开电控箱电源，点击“”连接程序，点击“”运行程序。此时，便可以通过“Scope”实时观察摆杆角度。

3 倒立摆数学建模（预习内容）*

被控对象模型的建立是控制器设计的基础。建立模型的方法有两大类，即基于物理原理的方式和基于辨识的方式。本章将基于牛顿力学原理建立倒立摆的微分方程。由于倒立摆是一个非线性系统，因此当我们采用线性方法进行控制器设计时，需要将非线性的模型在其工作点附近进行线性化，从而推导出倒立摆的传递函数和状态空间方程。

3.1 倒立摆动力学方程

在忽略了空气流动和各种摩擦之后，可将倒立摆系统抽象成导轨、小车和匀质杆组成的系统，如图 8 所示。

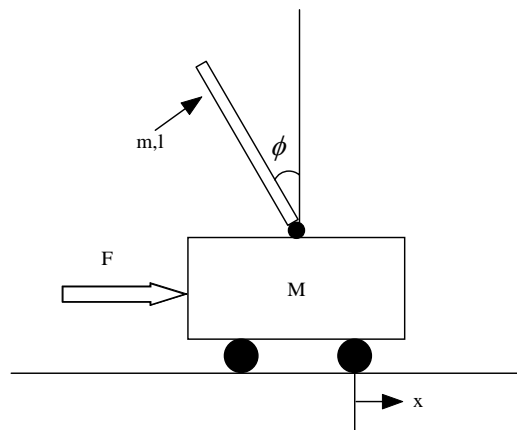


图 8 直线一级倒立摆模型^[5]

倒立摆模型变量的物理含义和数值如表 1 所示：

变量	物理含义	数值（单位）
M	小车质量	1.096 Kg
m	摆杆质量	0.109 Kg
b	小车摩擦系数	$0.1 \text{ Nm}^{-1}\text{s}^{-1}$
l	摆杆转动轴心到杆质心的长度	0.25 m
I	摆杆惯量	$0.0091 \text{ Kg}\cdot\text{m}^2$
F	加在小车上的力	
x	小车位置	
ϕ	摆杆与垂直向上方向的夹角（逆时针为正）	

图 9 是倒立摆小车和摆杆的受力分析图，其中 N 和 P 为小车与摆杆相互作用力的水平和垂直分析的分量。

* 请在进行其他实验之前提交本部分的预习报告。

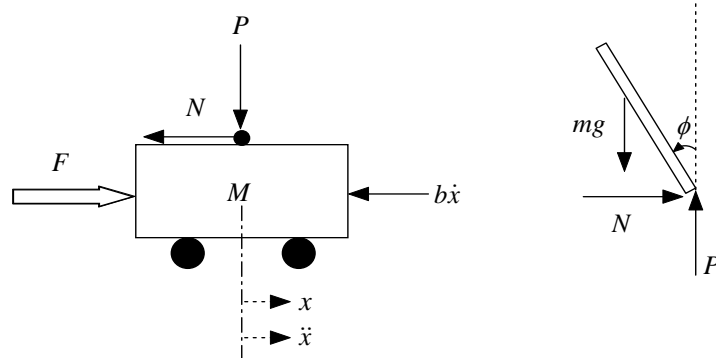


图9 小车和摆杆受力分析图^[5]

倒立摆本体主要由小车和摆杆组成。因此，我们可以运用牛顿力学原理，分别建立两部分的微分方程模型^[5, 6]。

(1) 小车模型

分析小车水平方向所受的合力，可以得到以下方程：

$$M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N$$

(2) 摆杆模型

摆杆可近似看作质量均匀分布的直杆，其质心在摆杆的中间。摆杆质心在水平和垂直方向的力学方程式分别为：

$$\begin{aligned} N &= m \frac{d^2}{dt^2}(x - l \sin \phi) = m\ddot{x} - ml\ddot{\phi} \cos \phi + ml\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ -P + mg &= m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \phi) = -ml(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \end{aligned}$$

由于摆杆作旋转运动，可以获得其力矩平衡方程：

$$Pl \sin \phi + Nl \cos \phi = I\ddot{\phi}$$

综上所述，我们获得了如下的倒立摆本体的微分方程模型：

$$\begin{cases} M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N \\ I\ddot{\phi} = Pl \sin \phi + Nl \cos \phi \\ N = m\ddot{x} - ml\ddot{\phi} \cos \phi + ml\dot{\phi}^2 \sin \phi \\ P = mg + ml(\ddot{\phi} \sin \phi + \dot{\phi}^2 \cos \phi) \end{cases} \quad (1)$$

3.2 传递函数

显而易见，公式（1）给出的倒立摆微分方程组是一个非线性模型。该模型可以用于倒立摆的非线性控制器设计。但是，如果想运用线性控制理论对倒立摆进行性能分析与控制器设计，我们就需要将非线性的倒立摆模型在其工作点附近进行线性化。倒立摆的工作点就是它的平衡点，即 $\phi = 0$ 。当 ϕ 很小时（如 $|\phi| \leq 5^\circ$ ），我们可以作如下的近似处理：

$$\sin \phi \approx \phi, \quad \cos \phi \approx 1, \quad \phi^2 \approx 0, \quad \dot{\phi}^2 \approx 0$$

请使用上述的近似处理方法对公式 (1) 进行线性化。

假设模型的初始状态为零，根据线性化后的微分方程推导倒立摆本体的如下的传递函数的表达式和具体数值，其中 $A(s)$ 为小车加速度。（提示：公式 (1) 中的变量 P 和 N 为过渡变量，可以消去。）

$$(1) \quad \frac{\Phi(s)}{F(s)} =$$

$$(2) \quad \frac{\Phi(s)}{A(s)} =$$

$$(3) \quad \frac{X(s)}{F(s)} =$$

3.3 状态空间方程

经典控制方法是基于系统的传递函数，而现代控制理论则以系统的状态方程为出发点。为了便于运用现代控制理论分析和设计倒立摆系统，我们需要建立倒立摆本体的状态空间模型。

倒立摆是通过给小车施加一定的力，从而使倒立摆直立起来。由于小车的行程是有限的，小车最好能稳定在其初始位置。因此，可以选定外力 F 给小车施加的加速度 a 为控制信号，而选取小车的位置 x 和倒立摆的角度 ϕ 为输出变量，即 $\mathbf{u} = \mathbf{a} = \ddot{x}$ ， $\mathbf{y} = [x \quad \phi]^T$ 。

请根据线性化后的微分方程，建立倒立摆本体的状态空间方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases}$$

其中 $\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad \phi \quad \dot{\phi}]^T$ 。

请用两种以上方法分别判断该系统是否可控、是否可观。

请通过坐标变换的方法将上述的状态空间方程转化为特征值规范型和可控规范型，并给出相应的变换矩阵。（提示：可用 Matlab 辅助计算，指令为“ss2ss”。）

4 实验一：根轨迹方法控制实验

闭环系统瞬态响应的基本特性与闭环极点的位置紧密相关，如果系统具有可变的环路增益，则闭环极点的位置取决于所选择的环路增益，从设计的观点来看，对于有些系统，通过简单的增益调节就可以将闭环极点移到需要的位置，如果只调节增益不能满足所需要的性能时，就需要设计校正器，常见的校正器有超前校正、滞后校正以及超前滞后校正等^[6, 7]。

4.1 根轨迹分析（预习内容）

当倒立摆系统的输入为小车的加速度 $a(t) = x(t)$ ，输出为摆杆的角度 $\phi(t)$ 时，倒立摆系统的开环传递函数为：

$$G(s) = \frac{\Phi(s)}{A(s)}$$

作系统的根轨迹图，并运用根轨迹法分析系统的稳定性（提示：可使用 MATLAB 指令“rlocus”）。

判断该系统是否可以通过调整开环增益使系统稳定并阐明原因。

对于该系统，我们应该设计何种类型的串联校正器使系统稳定并满足一定的瞬态性能要求（超前校正、滞后校正或超前滞后校正），为什么？

4.2 根轨迹校正器理论设计（预习内容）

下面我们运用根轨迹校正法设计倒立摆的串联控制器，使倒立摆能够直立起来并满足一定的瞬态性能指标。系统框图如下图所示，其中 $r(t)$ 为给定的摆杆角度参考信号， $\phi(t)$ 为传感器测得的摆杆角度信号， $e(t)$ 为摆杆的参考角度与实际角度的误差信号， $v(t)$ 为控制器 $K(s)$ 给出的小车加速度的控制信号。

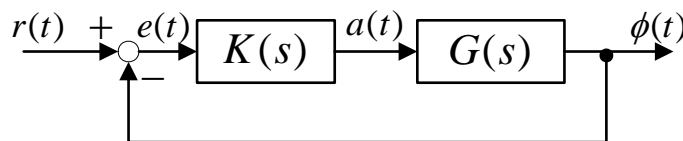


图 10 串联校正方框图

参照《自动控制理论（1）》或《自动控制理论（1）（英）》课程的课件，设计控制器 $K(s)$ ，使得校正后系统稳定且满足调整时间 $t_s = 0.5\text{ s}$ （2%的误差）、超调量 $\sigma \leq 10\%$ 的瞬态性能指标。

要求预习报告给出：

- (1) 给出控制器理论设计的步骤；
- (2) 作校正后的系统的根轨迹图；

(3) 作闭环控制系统的阶跃响应曲线，验证系统的性能是否达到设计要求。

提示：上述步骤可以使用 MATLAB 辅助设计。如果使用了 MATLAB，给出相应的 MATLAB 程序（提示：可能用到的 MATLAB 指令有“rlocus”、“rlocfind”、“step”、“plot”等）。

4.3 根轨迹校正 Simulink 软仿真

MATLAB 提供了一个强大的图形化仿真工具 Simulink。对于初次使用 MATLAB Simulink 实验者，请在进行此实验之前熟悉 Simulink 相关的知识和使用方法。

建立图 10 所示系统的 Simulink 模型。图 10 所示的方框图包含

- (1) 两个以传递函数表达的线性系统（对应的 Simulink 模块为“Simulink\Continuous\Transfer Fcn”，其中“A\B”表示“B”为“A”的子目录。）
- (2) 一个求和单元（对应的 Simulink 模块为“Simulink\Math Operations\Sum”）
- (3) 给定参考信号，例如一个阶跃信号（对应的 Simulink 模块为“Simulink\Sources\Step”）
- (4) 摆杆角度输出信号的观察和记录。观察可以使用“Simulink\Sinks\Scope”模块，而数据的记录可以使用“Simulink\Sinks\To Workspace”模块将数据记录到一个指定的变量中。

建立好倒立摆闭环控制系统的 Simulink 模型后，便可以进行仿真。由于该仿真为软仿真，因此仿真的模式设为“Normal”，仿真计算方法（“Solver”）可以自行选取定步长或变步长的各种方法。

提示：“Scope”模块主要用于对信号的实时观测。实验报告中不允许直接对“Scope”的曲线进行屏幕拷贝，而必须使用“plot”指令对“To Workspace”模块存储的变量进行作图。假设“To Workspace”存储的变量名为“ANGLE”且存储方式为“Structure With Time”，那么就可以使用如下的 MATLAB 指令作图：

```
h = figure;  
plot(ANGLE.time, ANGLE.signals.values);  
xlabel('t (s)'); ylabel('Angle (degree)');
```

4.4 根轨迹校正硬件在环实时仿真

根轨迹校正硬件在环实时仿真的 Simulink 模型如图 11 所示，其中橙色模块“Controller K(s)”为需要设计的控制器，而绿色模块“Real Control”连接到倒立摆系统的硬件部分。

Hardware -in-the-Loop Simulation Model

Compensator Design for the Inverted Pendulum by the Root -Locus Method

Control Theory Lab , Dept of Automation , Tsinghua University

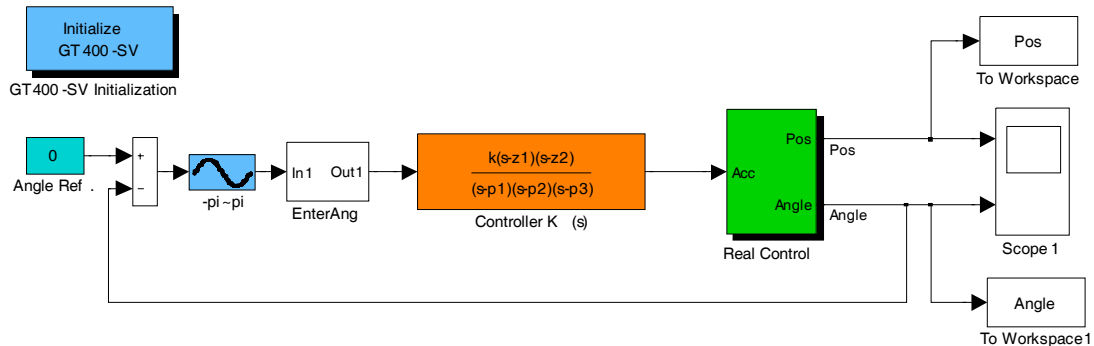


图 11 倒立摆根轨迹方法控制系统硬件在环实时仿真模型

除了两个主要的模块以外，该模型还包括如下的单元：

- (1) “GT400-SV Initialization” 模块实现运动采集卡的初始工作；
- (2) “-pi ~ pi” 模块将摆杆角度误差信号转换为幅值在 $[-\pi, \pi]$ 范围、单位为弧度的角度。
- (3) “EnterAng” 模块对“-pi ~ pi”模块的输出信号进行处理。该单元是一个子系统，是由图 12 所示的模块封装而成的。当摆杆角度误差的绝对值小于 10 度时，摆杆角度误差信号输入到控制器中；当摆杆角度误差的绝对值大于或等于 10 度时，摆杆角度误差信号输入被屏蔽，输入到控制器的信号为零。该单元主要是确保只有当倒立摆工作在较为线性的区域时，控制器才发生作用。

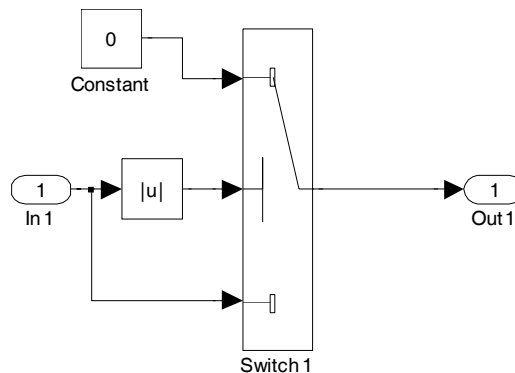


图 12 “EnterAng”子系统的模型^[5]

绿色“Real Control”模块是一个封装的系统，双击该模块，可以得到其系统组成。有兴趣的同学可以研究每个模块的功能。值得一提的是，该系统包含了“Saturation”模块，对控制信号进行限幅，从而保护伺服电机和倒立摆等硬件设备。

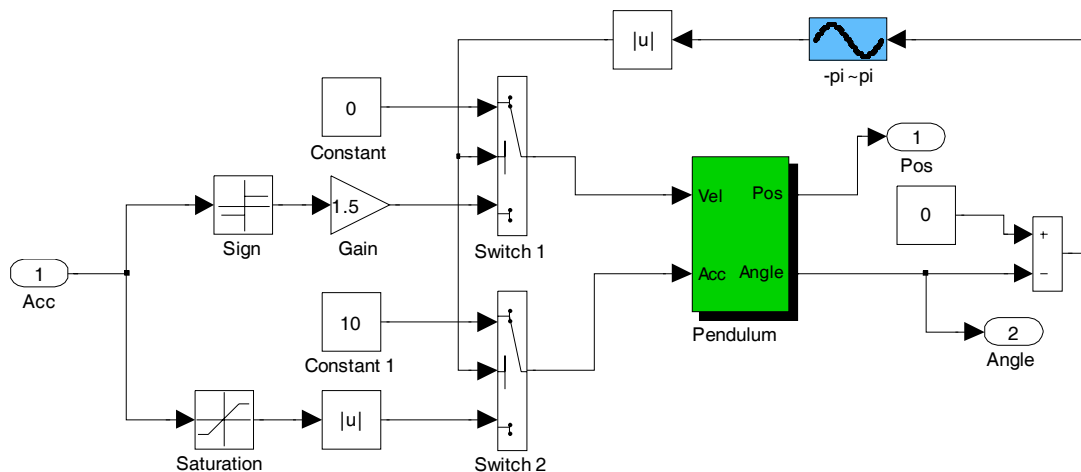


图 13 “Real Control”子系统的模型^[5]

实验任务：

- (1) 熟悉倒立摆硬件在环实时控制平台的模型，并将设计好的控制器输入到控制器模块“Controller K(s)”中；
- (2) 根据第一章所介绍的硬件在环仿真的步骤，对模型进行编译、连接和代码执行，实时观测系统的阶跃响应；
- (3) 对实验数据进行处理和分析，作出硬件在环实验的图表，比较其与软仿真结果的差异。

4.5 思考题

- (1) 试分析你设计的控制系统的静态误差。
- (2) 你能设计一个控制器 $K(s)$ ，使得校正后系统稳定且满足调整时间不大于 $t_s = 1\text{s}$ (2%的误差)、超调量 $\sigma \leq 30\%$ 的瞬态性能指标，同时满足位置误差常数 $K_p \geq 3$ 的静态误差要求吗？（给出设计步骤和软仿真结果。）

5 实验二：频域响应方法控制实验

根轨迹法和频域响应法分别从时间域和频域的角度设计串联补偿器（也称校正器或控制器），提高系统的稳定裕度和性能指标。它们构成了经典控制理论控制系统设计的主要内容。两者虽然方法完全不同，但却达到了异曲同工的控制效果。

本实验将运用频域响应法设计倒立摆的串联校正器^[6, 7]，主要包括四大内容，即开环系统频域分析、频域响应法校正器设计与 MATLAB 仿真、频域响应校正 Simulink 软仿真和频域响应校正硬件在环实时仿真。由于频域响应法和根轨迹法的设计思路类似，本章主要给出频域响应法与根轨迹法实验方法和要求的不同之处，而省略共同点。

5.1 频域特性分析（预习内容）

频域特性分析主要解决以下的问题：

- (1) 通过伯德图 (Bode Plots) 和奈奎斯特图 (Nyquist Plots) 分析倒立摆系统的开环传递函数 $G(s) = \frac{\Phi(s)}{V(s)}$ 的稳定性（提示：可使用 MATLAB 指令“bode”和“nyquist”）；
- (2) 判断该系统是否可以通过调整开环增益使系统稳定并阐明原因；
- (3) 对于该系统，我们应该设计何种类型的串联校正器使系统稳定并满足一定的瞬态性能要求（超前校正、滞后校正或超前滞后校正），为什么？

5.2 频域响应法校正器设计与 MATLAB 仿真（预习内容）

系统框图如图 10 所示，运用频域响应法设计控制器 $K(s)$ ，使得校正后的倒立摆系统稳定且满足静态位置误差常数 $K_p \geq 10$ ，相角稳定裕量 $\geq 50^\circ$ 。

要求预习报告给出：

- (1) 给出控制器设计的步骤；
- (2) 作校正后的系统的伯德图和奈奎斯特图，验证系统的性能是否达到设计要求。

提示：上述步骤可以使用 MATLAB 辅助设计。如果使用了 MATLAB，给出相应的 MATLAB 程序（提示：可能用到的 MATLAB 指令有“rlocus”、“rlocfind”、“step”、“plot”等）。

5.3 频域响应校正 Simulink 软仿真

MATLAB 提供了一个强大的图形化仿真工具 Simulink。对于初次使用 MATLAB Simulink 实验者，请在进行此实验之前熟悉 Simulink 相关的知识和使用方法。

建立图 10 所示系统的 Simulink 模型，进行软仿真，并记录和分析仿真结果。

5.4 频域响应校正硬件在环实时仿真

频域响应校正的硬件在环仿真与根轨迹法硬件在环仿真完全相同，只需将控制器设置为频域响应法设计的校正器即可，其 Simulink 硬件在环仿真模型如图 14 所示。

Hardware -in-the-Loop Simulation Model

Compensator Design for the Inverted Pendulum by the Frequency -Response Method

Control Theory Lab , Dept of Automation , Tsinghua University

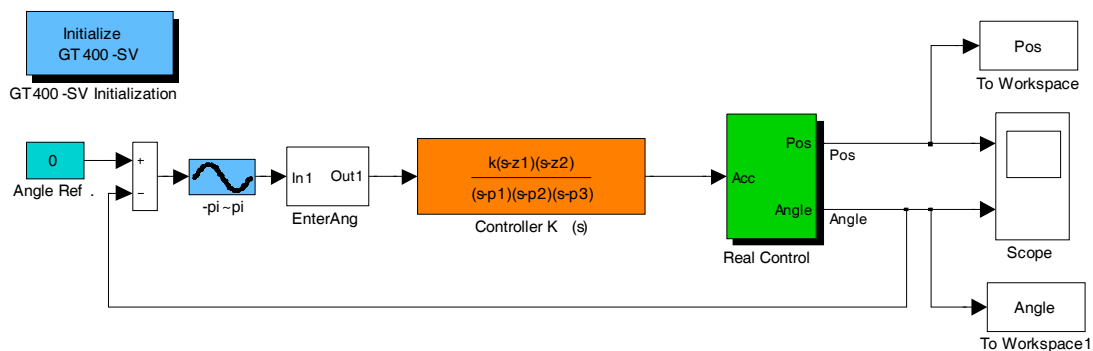


图 14 倒立摆根频域响应方法控制系统硬件在环实时仿真模型

实验任务：

- (1) 熟悉倒立摆硬件在环实时控制平台的模型，并将设计好的控制器输入到控制器模块“Controller K(s)”中；
- (2) 根据第一章所介绍的硬件在环仿真的步骤，对模型进行编译、连接和代码执行，实时观测系统的阶跃响应；
- (3) 对实验数据进行处理和分析，作出硬件在环实验的图表，比较其与软仿真结果的差异。

5.5 思考题

- (1) 你能运用频域响应法设计控制器 $K(s)$ ，使得校正后的倒立摆系统稳定且满足静态位置误差常数 $K_p \geq 20$ ，相角稳定裕量 $\geq 50^\circ$ 吗？（给出设计步骤和软仿真结果）

6 实验三：极点配置控制方法实验

经典控制理论的研究对象主要是单输入单输出的系统。现代控制理论将经典控制理论的概念扩展到多输入多输出系统。极点配置法通过设计状态反馈控制器将多变量系统的闭环系统极点配置在期望的位置上，从而使系统满足瞬态和稳态性能指标。前面我们已经得到了倒立摆系统的比较精确的动力学模型，下面我们针对直线型一级倒立摆系统应用极点配置法设计控制器^[8]。

6.1 极点配置及软仿真（预习内容）

给定一个状态方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ ，其中 \mathbf{x} 为状态向量， \mathbf{u} 为控制向量。选择控制信号为 $\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ 求解上式，得到 $\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t)$ 。如果系统状态完全可控，通过选择合适的反馈矩阵 \mathbf{K} 就可以将比环系统的极点配置到期望的位置，从而是系统达到期望的性能要求。

根据倒立摆的微分方程建立其状态空间方程

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

式中 $\mathbf{x} = [x \quad \dot{x} \quad \phi \quad \dot{\phi}]^T$ ， $\mathbf{u} = a = \ddot{x}$ ， $\mathbf{y} = [x \quad \phi]^T$ 。

采用两种不同的方法，设计状态反馈矩阵，配置闭环系统的极点，从而使系统过渡过程时间 $t_s \approx 3\text{s}$ ，阻尼系数 $\zeta = 0.5$ ，最大自然振荡频率不大于 15 Hz。

预习报告要求给出设计步骤及结果。

6.2 极点配置软仿真

Software Simulation Model

Compensator Design for the Inverted Pendulum by the Pole -Placement Method
Control Theory Lab , Dept of Automation , Tsinghua University

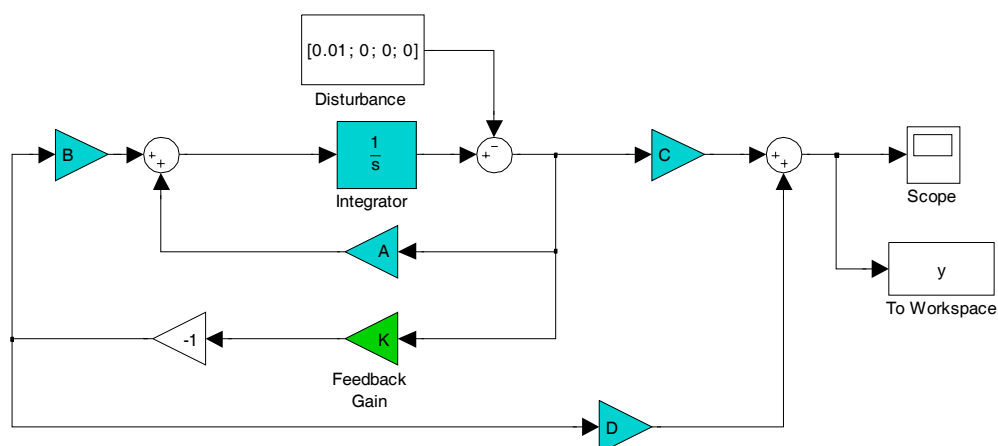


图 15 倒立摆极点配置软仿真模型

实验任务：

- (1) 将极点配置矩阵 \mathbf{K} 以及倒立摆开环系统状态方程的矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ 输入到图 15 所示的 Simulink 模型；
- (2) 进行软仿真实验，观测倒立摆摆杆角度和小车位置的响应，记录实验数据，对系统的控制性能进行分析；
- (3) 改变摆杆角度的干扰信号（自行选择信号的类型和幅值），观测系统的响应特性。

6.3 极点配置硬件在环实时仿真实验

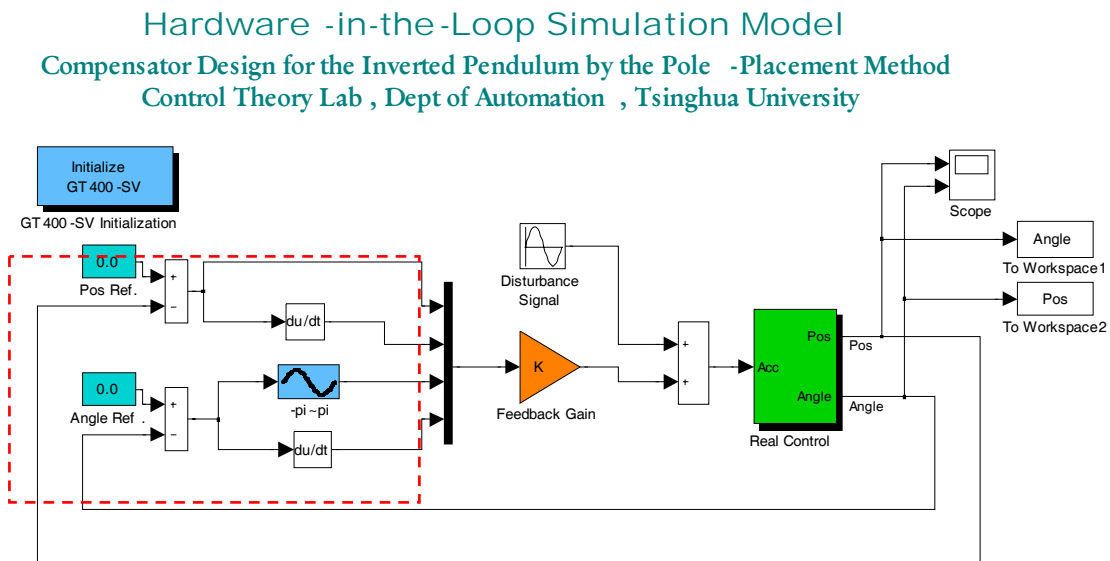


图 16 倒立摆极点配置硬件在环仿真模型

实验步骤如下：

- (1) 进入 Simulink，打开如图 16 所示的倒立摆极点控制硬件在环仿真模型；
- (2) 点击“Feedback Gain”模块设置状态反馈矩阵参数，把前面仿真结果较好的参数输入到模块中；
- (3) 点击编译程序，完成后点击使计算机和倒立摆建立连接；
- (4) 点击运行程序，提起倒立摆的摆杆到竖直向上的位置，在程序进入自动控制后松开；
- (5) 双击“Scope”观察实验结果；
- (6) 在给定倒立摆干扰后，观察实验结果，判断极点反馈是否达到设计要求。

6.4 思考题

- (1) 倒立摆实验中我们只能直接获得摆杆角度和小车的位置这两个信号。实验中通过加入微分环节获得摆杆角速度和小车的速度。请问这种方法是否存在问题？你在实验中是怎么解决此问题的？

- (2) 倒立摆实验中能够直接测量到的信号为摆杆角度和小车的位置。请设计一个全维状态观测器和一个最小维状态观测器，以获得系统的状态，评估带观测器的控制系统的响应特性（与直接的状态反馈比较）。

7 实验四：线性二次型最优控制实验

在现代控制理论中，基于二次型性能指标进行最优设计的问题已成为最优控制理论中的一个重要问题。本实验研究倒立摆线性定常模型的无限时间二次型调节器的设计与实验验证问题。

7.1 LQR 控制器设计（预习内容）

线性定常无限时间二次型调节问题的提法^[8]是，对由如下状态方程和初始条件

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$$

描述的线性定常系统，寻求最优控制 $\mathbf{u}(t)$ ，使性能指标

$$J = \int_{t_0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(\tau)\mathbf{Q}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{u}^T(\tau)\mathbf{R}\mathbf{u}(\tau)]d\tau$$

取极小值，其中 $\mathbf{Q} \geq 0$ 和 $\mathbf{R} > 0$ 都是常数对称矩阵。

性能指标 J 是一项综合指标。积分中的第一项表示对状态 $\mathbf{x}(t)$ 的要求。用它来衡量整个控制期间系统的实际状态与给定状态之间的综合误差。积分的第二项是对控制总能量的限制。

依据倒立摆状态空间方程，设计 LQR 控制器，使得当在小车上施加 0.2m 的阶跃信号时，闭环系统的响应指标为：（提示：可以使用 MATLAB 中的“lqr”指令设计 LQR 控制器。）

- (1) 杆角度 ϕ 和小车位移 x 的稳定时间小于 5 秒
- (2) ϕ 的超调量小于 20° （0.35 弧度）
- (3) 位置稳态误差小于 4%

请问性能指标中的加权矩阵 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 是如何影响系统性能的？你是如何选取 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 的数值的？矩阵 \mathbf{R} 为什么要求是严格正定的，而不能半正定？

7.2 LQR 控制器软仿真

实验任务：

- (1) 计算出 LQR 控制的状态反馈矩阵 \mathbf{K} ；
- (2) 对状态反馈控制系统进行小车位移 0.2 m 的阶跃响应仿真，反复调整 \mathbf{Q} 和 \mathbf{R} ，得到不同的 \mathbf{K} ，直到系统响应满足控制要求。（可以使用 MATLAB 指令或图 17 所示的 Simulink 模型。）

Software Simulation Model

Compensator Design for the Inverted Pendulum by the LQR Control Method
Control Theory Lab, Dept of Automation, Tsinghua University

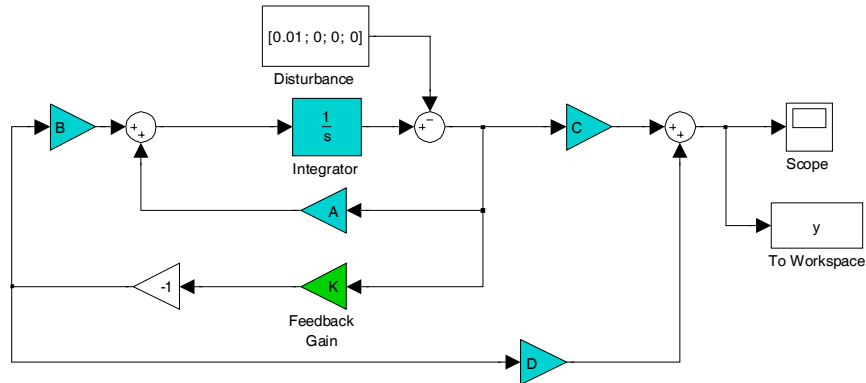


图 17 LQR 控制软仿真模型

7.3 LQR 控制硬件在环实时仿真实验

Hardware -in-the-Loop Simulation Model

Compensator Design for the Inverted Pendulum by the LQR Control Method
Control Theory Lab, Dept of Automation, Tsinghua University

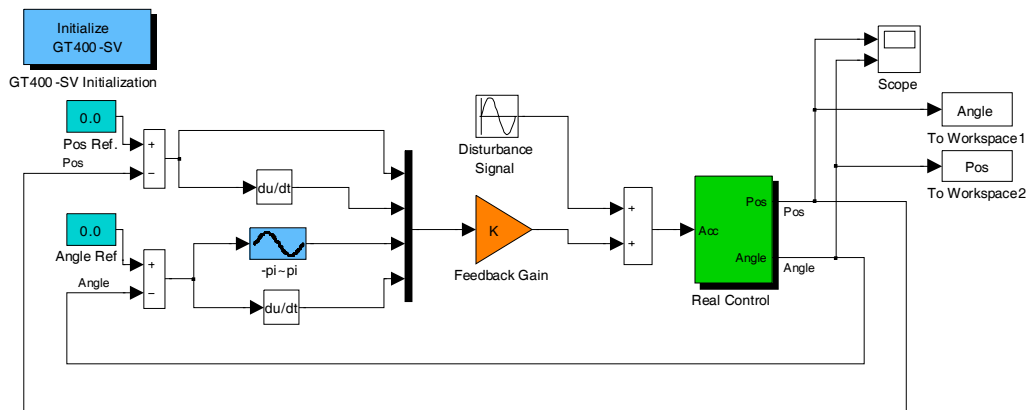


图 18 倒立摆 LQR 控制硬件在环仿真模型

实验步骤如下：

- (1) 进入 Simulink，打开如图 18 所示的倒立摆 LQR 控制硬件在环仿真模型；
- (2) 点击“Feedback Gain”模块设置状态反馈矩阵参数，把前面仿真结果较好的参数输入到模块中；
- (3) 点击编译程序，完成后点击使计算机和倒立摆建立连接；
- (4) 点击运行程序，提起倒立摆的摆杆到竖直向上的位置，在程序进入自动控制后松开；
- (5) 在平衡位置，分别设定下列三种信号，记录倒立摆的运动情况：

- ① 方波信号：频率0.2 Hz，幅值0.1 m；
- ② 正弦波信号：频率0.2 Hz，幅值0.1 m；
- ③ 锯齿波信号：频率0.2 Hz，幅值0.1 m。

7.4 思考题

- (1) 如果倒立摆模型的参数有较小的误差，LQR 最优控制器还能保证系统的稳定性吗？为什么？（提示：LQR 控制器的稳定裕度）
- (2) 倒立摆实验中我们只能直接获得摆杆角度和小车的位置这两个信号。实验中通过加入微分环节获得摆杆角速度和小车的速度。请问这种方法是否存在问题？你在实验中是怎么解决此问题的？
- (3) 倒立摆实验中能够直接测量到的信号为摆杆角度和小车的位置。请设计一个全维状态观测器和一个最小维状态观测器，以获得系统的状态，评估带观测器的控制系统的响应特性（与直接的状态反馈比较）。

8 实验五：自主选题的控制器设计

请根据个人的兴趣，自行设计控制器。以下是几个值得研究的问题，仅供参考：

- (1) 采用经典方法设计控制器时，我们主要是针对摆杆角度的控制，而没有考虑小车的位置。你能用经典控制器同时实现摆杆角度和小车位置的控制吗？
- (2) 在实验中，我们采用手动的方式将摆杆提起来。你能通过控制器实现摆杆的自动起摆吗？

提示：自创实验的内容不限于上述的问题。任何有创意的想法都是欢迎和鼓励的。建议自创实验依照理论设计、软件仿真和实时仿真的步骤进行。在软仿真实验之前，不要轻易进行硬件在环实验，以免造成人身伤害和设备损坏。

9 附录：控制理论中常用的 MATLAB 函数

函数名称	功能描述 ^[9]
Bandwidth	计算单输入单输出系统的带宽
Bode	计算并绘制波德响应图
c2d	把连续时间模型转化为离散时间模型
d2c	把离散时间模型转化为连续时间模型
d2d	对离散时间模型重新采样
damp	计算自然频率和阻尼系数
dcgain	计算低频（直流）增益
esort	通过实部对连续系统的极点进行排序
feedback	计算反馈闭环系统的模型
freqresp	估计选定频率的频率响应
gensig	产生输入信号
impulse	计算并绘制脉冲响应
initial	计算并绘制给定初始状态下的响应
logspace	产生呈对数分布的频率的向量
lsim	仿真任意输入下线性时不变系统的响应
ltiview	打开 LTI Viewer 的图形界面进行线性系统的响应分析
margin	计算幅值和相角裕度
ngrid	对尼科尔斯（Nichols）图添加网格
nichols	绘制尼科尔斯图
nyquist	绘制奈奎斯特图
parallel	系统并联
pole	计算线性时不变模型的极点
pzmap	绘制线性时不变模型的零极点分布图
rlocus	计算并绘制根轨迹
roots	计算多项式的根
series	系统串联
sgrid,zgrid	为根轨迹图或者零极点图添加 s/z 平面网格
sisotool	单输入单输出系统设计工具箱
size	显示输入/输出/数组的维数
step	计算阶跃响应
tf	创建传递函数
zero	计算线性时不变模型的零点
zpk	构造零极点模型

10 参考文献

- [1] Instruction Manual of AC Servo Motor and Driver MINAS A4 Series: Panasonic.
- [2] GT系列运动控制器用户手册: 固高科技(深圳)有限公司, 2005.
- [3] Real-Time Workshop User's Guide: The MathWorks, 2001.
- [4] Real-Time Windows Target: The MathWorks, 2004.
- [5] 倒立摆与自动控制原理实验: 固高科技(深圳)有限公司, 2005.
- [6] Ogata K. Modern Control Engineering, Prentice Hall, 2001.
- [7] 吴麒, 王诗宓. 自动控制原理(上), 清华大学出版社, 2006.
- [8] 吴麒, 王诗宓. 自动控制原理(下), 清华大学出版社, 2006.
- [9] Control System Toolbox User's Guide: The MathWorks, 2007.
- [10] 赵世敏. 控制理论专题实验指示书: 清华大学自动化系, 2007.

本实验指示书的编写过程中参考了上述的文献, 特别是文献^[5]和文献^[10]。特此表示感谢!